

Problemi di Fisica

ELETTROMAGNETISMO

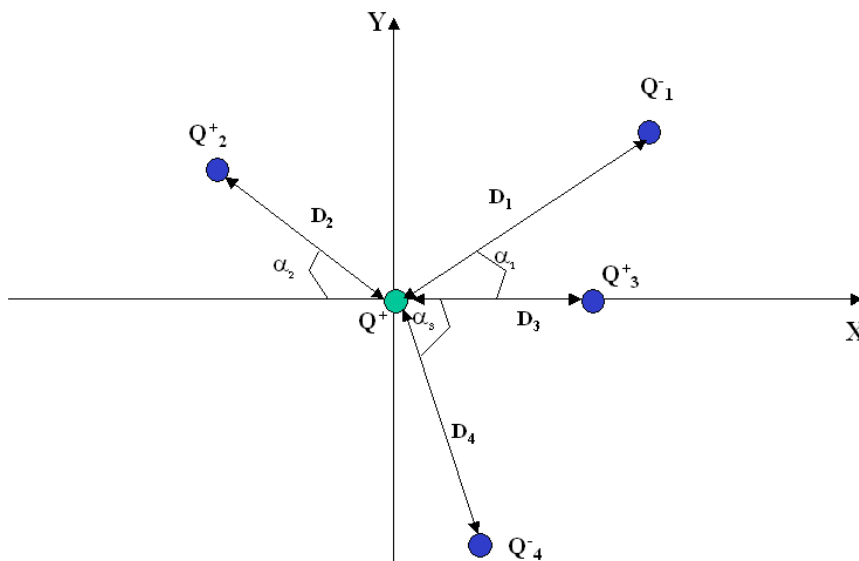
La carica elettrica
e la legge di Coulomb

Problema

Data la distribuzione di carica rappresentata in figura, calcolare la forza totale che agisce sulla carica Q posta nell'origine degli assi cartesiani. I dati sono:

$Q = +6e$	$Q_1 = -2e$	$Q_2 = +4e$	$Q_3 = +5e$	$Q_4 = -e$
	$D_1 = 3 \text{ cm}$	$D_2 = 2 \text{ cm}$	$D_3 = 2 \text{ cm}$	$D_4 = 3 \text{ cm}$
	$\alpha_1 = 30^\circ$	$\alpha_2 = 45^\circ$	$\alpha_3 = 0^\circ$	$\alpha_4 = 80^\circ$

Distribuzione delle cariche



Soluzione

Applicando la legge di Coulomb, determiniamo il valore delle singole forze che agiscono sulla carica Q per effetto dell'interazione con la distribuzione di cariche:

$$F_1 = K \cdot \frac{Q \cdot Q_1}{D_1^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{6e \cdot 2e}{(3 \cdot 10^{-2})^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 12e^2}{9 \cdot 10^{-4}} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 12 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{9 \cdot 10^{-4}} =$$

$$\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 12 \cdot 2,6 \cdot 10^{-38}}{9 \cdot 10^{-4}} = 31,2 \cdot 10^{-25} \text{ N}$$

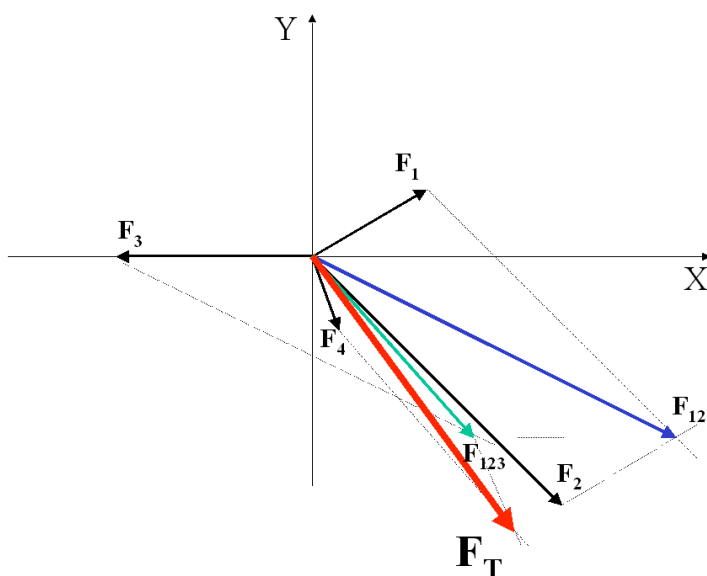
$$F_2 = K \cdot \frac{Q \cdot Q_2}{D_2^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{24e^2}{(2 \cdot 10^{-2})^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 24 \cdot 2,6 \cdot 10^{-38}}{4 \cdot 10^{-4}} = 140,4 \cdot 10^{-25} \text{ N}$$

$$F_3 = K \cdot \frac{Q \cdot Q_3}{D_3^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{30e^2}{(2 \cdot 10^{-2})^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 30 \cdot 2,6 \cdot 10^{-38}}{4 \cdot 10^{-4}} = 67,5 \cdot 10^{-25} \text{ N}$$

$$F_4 = K \cdot \frac{Q \cdot Q_4}{D_4^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{6e^2}{(3 \cdot 10^{-2})^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 2,6 \cdot 10^{-38}}{9 \cdot 10^{-4}} = 6 \cdot 10^{-25} \text{ N}$$

Rappresentiamo graficamente queste forze, riportandole in scala sul sistema di assi cartesiani, e con l'aiuto dell'algebra vettoriale (metodo del parallelogramma) determiniamo la forza risultante che agisce sulla carica Q:

Diagramma delle forze



A questo punto determiniamo il modulo e l'argomento della forza risultante che agisce su Q, facendo uso delle seguenti nozioni sui vettori:

Componenti del vettore F	Modulo del vettore F	Argomento del vettore F
$F_X = F \cdot \cos \alpha$ $F_Y = F \cdot \sin \alpha$	$F = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2}$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_Y}{F_X} \quad \alpha = \arctg \alpha$

Le componenti delle singole forze sono:

Componenti di F₁	Componenti di F₂
$F_{1X} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 31,2 \cdot 10^{-25} \cdot \cos 30^\circ = 27 \cdot 10^{-25} \text{ N}$ $F_{1Y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 31,2 \cdot 10^{-25} \cdot \sin 30^\circ = 15,6 \cdot 10^{-25} \text{ N}$	$F_{2X} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 140,4 \cdot 10^{-25} \cdot \cos 45^\circ = 99,3 \cdot 10^{-25} \text{ N}$ $F_{2Y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 140,4 \cdot 10^{-25} \cdot \sin 45^\circ = 99,3 \cdot 10^{-25} \text{ N}$
Componenti di F₃	Componenti di F₄
$F_{3X} = F_3 = 67,5 \cdot 10^{-25} \text{ N}$ $F_{3Y} = 0$	$F_{4X} = F_4 \cdot \cos \alpha_4 = 6 \cdot 10^{-25} \cdot \cos 80^\circ = 1,04 \cdot 10^{-25} \text{ N}$ $F_{4Y} = F_4 \cdot \sin \alpha_4 = 6 \cdot 10^{-25} \cdot \sin 80^\circ = 5,9 \cdot 10^{-25} \text{ N}$

Le componenti della forza risultante sono date dalla somma algebrica delle componenti delle singole forze:

$$F_{XT} = \sum F_X = F_{1X} + F_{2X} - F_{3X} + F_{4X} = 27 \cdot 10^{-25} + 99,3 \cdot 10^{-25} - 67,5 \cdot 10^{-25} + 1,04 \cdot 10^{-25} = 59,8 \cdot 10^{-25} \text{ N}$$

$$F_{YT} = \sum F_Y = F_{1Y} - F_{2Y} - F_{4Y} = 15,6 \cdot 10^{-25} - 99 \cdot 10^{-25} - 5,9 \cdot 10^{-25} = -89,3 \cdot 10^{-25} \text{ N}$$

In definitiva il modulo e l'argomento della forza risultante sono dati da:

$$F_T = \sqrt{F_{XT}^2 + F_{YT}^2} = \sqrt{(59,8 \cdot 10^{-25})^2 + (89,3 \cdot 10^{-25})^2} = \sqrt{3576 \cdot 10^{-50} + 7974 \cdot 10^{-50}} = \sqrt{11550 \cdot 10^{-50}} = 107,4 \cdot 10^{-25} \text{ N}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{F_{YT}}{F_{XT}} = \frac{-89,3 \cdot 10^{-25}}{59,8 \cdot 10^{-25}} = -1,49$$

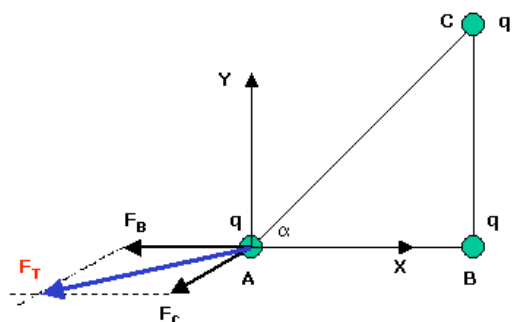
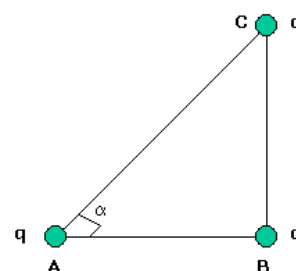
$$\alpha = \arctg \alpha = -56,2$$

Problema

In ciascuno dei vertici di un triangolo rettangolo isoscele, di cateto 6,0 cm, è posta una carica positiva $q = 1,0 \cdot 10^{-7} \text{ C}$. Determinare l'intensità della forza elettrica agente su ciascuna carica

Soluzione

1. FORZA TOTALE AGENTE SULLA CARICA IN A



Per il principio di sovrapposizione, sulla carica posta in A agisce una forza totale che è la somma vettoriale delle forze che le cariche poste in B ed in C esercitano sulla carica posta in A:

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C$$

Calcoliamo analiticamente la forza totale $\mathbf{F}_T$. Innanzitutto determiniamo il valore delle forze $\mathbf{F}_B$ e $\mathbf{F}_C$ attraverso la legge di Coulomb:

$$F_B = K \cdot \frac{q \cdot q}{AB^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1,0 \cdot 10^{-7} \cdot 1,0 \cdot 10^{-7}}{0,06^2} = 0,025 \text{ N}$$

$$F_C = K \cdot \frac{q \cdot q}{AC^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1,0 \cdot 10^{-7} \cdot 1,0 \cdot 10^{-7}}{0,08^2} = 0,014 \text{ N}$$

dove: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{0,06^2 + 0,06^2} = 0,08 \text{ m}$

Le componenti di $\mathbf{F}_B$ e $\mathbf{F}_C$ sono:

Componenti di $\mathbf{F}_B$	Componenti di $\mathbf{F}_C$
$F_{BX} = F_B = 0,025\text{N}$ $F_{BY} = 0\text{N}$	$F_{CX} = F_C \cdot \cos \alpha = 0,014 \cdot \cos 45^\circ = 0,0099\text{N}$ $F_{CY} = F_C \cdot \sin \alpha = 0,014 \cdot \sin 45^\circ = 0,0099\text{N}$ dove $\alpha = 45^\circ$ perché il triangolo è rettangolo isoscele

Le componenti della forza risultante sono date dalla somma algebrica delle componenti delle singole forze:

$$F_{XT} = \sum F_{Xi} = -F_{BX} - F_{CX} = -0,025 - 0,0099 = -0,035\text{ N}$$

$$F_{YT} = \sum F_{Yi} = F_{CY} + 0 = -0,0099 + 0 = -0,0099\text{ N}$$

In definitiva il modulo e l'argomento della forza risultante sono dati da:

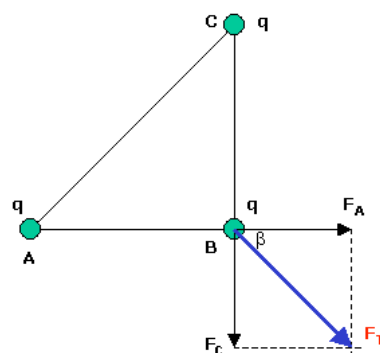
$$F_T = \sqrt{F_{XT}^2 + F_{YT}^2} = \sqrt{0,035^2 + 0,0099^2} = 0,036\text{N}$$

$$\text{tg} \gamma = \frac{F_{YT}}{F_{XT}} = \frac{0,0099}{0,035} = 0,28 \Rightarrow \gamma = 15,8^\circ$$

2. FORZA TOTALE AGENTE SULLA CARICA IN B

Per il principio di sovrapposizione, sulla carica posta in B agisce una forza totale che è la somma vettoriale delle forze che le cariche poste in A ed in C esercitano sulla carica posta in B:

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_C$$



Calcoliamo analiticamente la forza totale $\mathbf{F}_T$

Innanzitutto determiniamo il valore delle forze $\mathbf{F}_A$ e $\mathbf{F}_C$ attraverso la legge di Coulomb:

$$F_A = K \cdot \frac{q \cdot q}{AB^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1,0 \cdot 10^{-7} \cdot 1,0 \cdot 10^{-7}}{0,06^2} = 0,025\text{N}$$

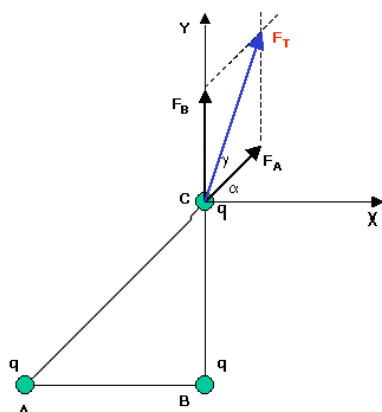
$$F_C = K \cdot \frac{q \cdot q}{BC^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1,0 \cdot 10^{-7} \cdot 1,0 \cdot 10^{-7}}{0,06^2} = 0,025\text{N}$$

Poiché $\mathbf{F}_A$ e $\mathbf{F}_C$ sono perpendicolari tra loro, il modulo e l'argomento della forza risultante sono dati da:

$$F_T = \sqrt{F_A^2 + F_C^2} = \sqrt{0,025^2 + 0,025^2} = 0,035\text{N}$$

$$\text{tg} \beta = \frac{F_C}{F_A} = \frac{0,025}{0,025} = 1 \Rightarrow \beta = 45^\circ$$

3. FORZA TOTALE AGENTE SULLA CARICA IN C



Per il principio di sovrapposizione, sulla carica posta in C agisce una forza totale che è la somma vettoriale delle forze che le cariche poste in A ed in B esercitano sulla carica posta in C:

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B$$

Calcoliamo analiticamente la forza totale $\mathbf{F}_T$

Innanzitutto determiniamo il valore delle forze $\mathbf{F}_A$ e $\mathbf{F}_B$ attraverso la legge di Coulomb:

$$F_A = K \cdot \frac{q \cdot q}{BC^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1,0 \cdot 10^{-7} \cdot 1,0 \cdot 10^{-7}}{0,08^2} = 0,014 \text{ N}$$

$$F_B = K \cdot \frac{q \cdot q}{BC^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1,0 \cdot 10^{-7} \cdot 1,0 \cdot 10^{-7}}{0,06^2} = 0,025 \text{ N}$$

dove: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{0,06^2 + 0,06^2} = 0,08 \text{ m}$

Le componenti di $\mathbf{F}_B$ e $\mathbf{F}_C$ sono:

Componenti di $\mathbf{F}_B$	Componenti di $\mathbf{F}_C$
$F_{BX} = 0 \text{ N}$ $F_{BY} = F_B = 0,025 \text{ N}$	$F_{AX} = F_A \cdot \cos \alpha = 0,014 \cdot \cos 45^\circ = 0,0099 \text{ N}$ $F_{AY} = F_C \cdot \sin \alpha = 0,014 \cdot \sin 45^\circ = 0,0099 \text{ N}$ dove $\alpha = 45^\circ$ perché il triangolo è rettangolo isoscele

Le componenti della forza risultante sono date dalla somma algebrica delle componenti delle singole forze:

$$F_{XT} = \sum F_{Xi} = F_{AX} + F_{BX} = 0,0099 + 0 = 0,0099 \text{ N}$$

$$F_{YT} = \sum F_{Yi} = F_{AY} + F_{BY} = 0,0099 + 0,025 = 0,035 \text{ N}$$

In definitiva il modulo e l'argomento della forza risultante sono dati da:

$$F_T = \sqrt{F_{XT}^2 + F_{YT}^2} = \sqrt{0,0099^2 + 0,035^2} = 0,036 \text{ N}$$

$$\text{tg} \gamma = \frac{F_{YT}}{F_{XT}} = \frac{0,035}{0,0099} = 3,54 \Rightarrow \gamma = 74,2^\circ$$

Problema

La forza esercitata su una carica $Q_1 = 0,95 \cdot 10^{-15}$ C quando una seconda carica $Q_2 = 3,25 \cdot 10^{-14}$ C è posta a una distanza $d = 0,84 \cdot 10^{-3}$ m è di $F = 16,4 \cdot 10^{-15}$ N. Determinare il valore della costante dielettrica in cui sono immerse le cariche.

Soluzione

La costante dielettrica relative del mezzo si calcola come formula inversa della legge di Coulomb:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_R} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{d^2} \Rightarrow 4\pi\epsilon_0\epsilon_R \cdot F \cdot d^2 = Q_1 \cdot Q_2 \Rightarrow \epsilon_R = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon_0 \cdot F \cdot d^2} =$$

$$\frac{0,95 \cdot 10^{-15} \cdot 3,25 \cdot 10^{-14}}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 16,4 \cdot 10^{-15} \cdot (0,84 \cdot 10^{-3})^2} = \frac{3,1 \cdot 10^{-29}}{1287 \cdot 10^{-33}} = 2,4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4 = 24$$

Il valore 24 corrisponde all'alcol etilico.

Problema

Nel modello di Rutherford dell'atomo di idrogeno l'elettrone ruota attorno al nucleo alla distanza di circa $R = 4 \cdot 10^{-2}$ nm. Qual è la frequenza della rotazione? ($m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $K = 9 \cdot 10^9$ N·m²/C²)

Soluzione

In questo modello, l'elettrone descrive una traiettoria circolare per cui è soggetto ad una forza centripeta, ossia una forza diretta verso il nucleo:

$$F = m \cdot a_C$$

dove: $a_C = \omega^2 \cdot R$ è l'accelerazione centripeta $\omega = 2\pi \cdot f$ è la pulsazione legata alla frequenza di rotazione f

Sostituendo queste quantità in F troveremo la frequenza di rotazione:

$$F = m \cdot a_C = m \cdot \omega^2 \cdot R = m \cdot (2\pi \cdot f)^2 \cdot R = 4\pi^2 \cdot f^2 \cdot m \cdot R \Rightarrow f^2 = \frac{F}{4\pi^2 \cdot m \cdot R} \Rightarrow f = \sqrt{\frac{F}{4\pi^2 \cdot m \cdot R}}$$

Ma la forza centripeta F non è altro che la forza elettrica che calcoliamo con la legge di Coulomb:

$$F = K \cdot \frac{e^2}{R^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2,6 \cdot 10^{-38}}{(4 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-9})^2} = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

per cui:

$$f = \sqrt{\frac{1,5 \cdot 10^{-7}}{4\pi^2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 4 \cdot 10^{-11}}} = 6 \cdot 10^{16} \text{ Hz}$$

Problema

Nel tentativo di comprendere meglio il comportamento degli atomi, il fisico danese Niels Bohr (1885-1962) propose un modello semplice per descrivere l'atomo di idrogeno. Nel modello di Bohr, così come viene chiamato, si immagina che l'elettrone si muova in un'orbita circolare intorno a un protone fermo. La forza responsabile del moto circolare dell'elettrone è la forza elettrica di attrazione tra l'elettrone e il protone.

- a) Sapendo che il raggio dell'orbita dell'elettrone è $5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ e la sua massa è $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, calcola la velocità dell'elettrone.
b) Qual è la frequenza del moto orbitale dell'elettrone?

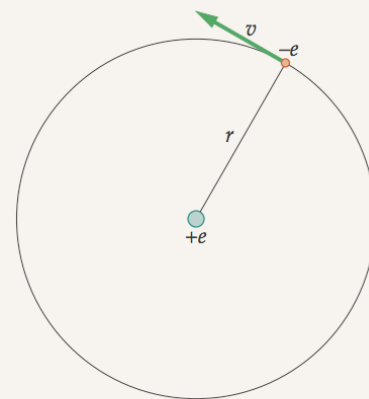
Soluzione

DESCRIZIONE DEL PROBLEMA

Il disegno mostra l'elettrone che percorre la sua orbita di raggio r con velocità v . Poiché il protone ha una massa molto maggiore dell'elettrone, rimane fondamentalmente fermo nel centro dell'orbita.

STRATEGIA

- a) L'idea alla base di questo modello è che per far muovere l'elettrone su un'orbita circolare è necessaria una forza, e questa è la forza elettrica di attrazione tra l'elettrone e il protone. Perciò, come per qualsiasi moto circolare, la forza che agisce sull'elettrone è uguale al prodotto della sua massa per l'accelerazione centripeta. Questo ci permette di ricavare l'accelerazione centripeta, $a_{cp} = v^2/r$, la quale, a sua volta, ci fornisce la velocità.
b) La frequenza del moto orbitale dell'elettrone è data da $f = 1/T$; T è il periodo del moto, vale a dire il tempo necessario a completare un'orbita. Il periodo è anche uguale al rapporto tra la lunghezza della circonferenza e la velocità, cioè $T = C/v = 2\pi r/v$. Per ottenere la frequenza è sufficiente calcolare il reciproco di quest'ultima espressione.



SOLUZIONE

- a) Scriviamo l'uguaglianza tra la forza di Coulomb tra l'elettrone e il protone e la forza centripeta corrispondente all'orbita circolare dell'elettrone:

$$k \frac{|q_1||q_2|}{r^2} = m_e a_{cp}$$

$$k \frac{e^2}{r^2} = m_e \frac{v^2}{r}$$

$$v = e \sqrt{\frac{k}{m_e r}}$$

Ricaviamo la velocità v dell'elettrone:

Sostituiamo i valori numerici:

$$v = (1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}) \sqrt{\frac{8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2}{(9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg})(5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m})}} = 2,19 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

- b) Calcoliamo il tempo necessario per completare un'orbita, T , come rapporto tra la distanza percorsa ($C = 2\pi r$) e la velocità v :

$$T = \frac{C}{v} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m})}{2,19 \cdot 10^6 \text{ m/s}} = 1,52 \cdot 10^{-16} \text{ s}$$

Per calcolare la frequenza, consideriamo il reciproco di T :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,52 \cdot 10^{-16} \text{ s}} = 6,58 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

Problema

Determinare la distanza d alla quale dovrebbero porsi due elettroni affinché la forza di interazione elettrica sia uguale al loro peso sulla superficie della Terra. ($m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$; $g = 9,8 \text{ m/s}^2$)

Soluzione

Poiché la forza elettrica tra i due elettroni è uguale alla loro forza peso sulla superficie della Terra, calcoliamo quest'ultima applicando il secondo principio della dinamica:

$$F_E = P = m \cdot g = 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9,8 = 89,2 \cdot 10^{-31} \text{ N}$$

Per calcolare d, applichiamo la legge di Coulomb:

$$F_E = K \cdot \frac{e^2}{d^2} \Rightarrow F_E \cdot d^2 = K \cdot e^2 \Rightarrow d^2 = \frac{K \cdot e^2}{F_E} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{K \cdot e^2}{F_E}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2,6 \cdot 10^{-38}}{89,2 \cdot 10^{-31}}} = 5,1 \text{ m}$$

Problema

Calcolare il raggio di una sfera di ferro che potrebbe essere sollevata da terra dalla forza d'interazione tra due cariche elettriche di 1C poste alla distanza di 1m. ($K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$; densità del ferro $\sigma = 7,8 \text{ kg/m}^3$)

Soluzione

Il raggio di una sfera è legato al suo volume dalla formula:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow R^3 = \frac{3V}{4\pi} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

Per calcolare R manca il volume, che può essere calcolato come:

$$\sigma = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\sigma}$$

Però ci manca il valore m della massa della sfera di ferro, che può essere calcolata applicando il secondo principio della dinamica:

$$P = m \cdot g \Rightarrow m = \frac{P}{g} = \frac{9 \cdot 10^9}{9,8} = 0,92 \cdot 10^9 \text{ kg}$$

dove la forza peso P, stando ai dati del problema, è uguale alla forza elettrica tra due cariche di 1C poste alla distanza di un metro:

$$P = F_E = K \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1 \cdot 1}{1^2} = 9 \cdot 10^9 \text{ N}$$

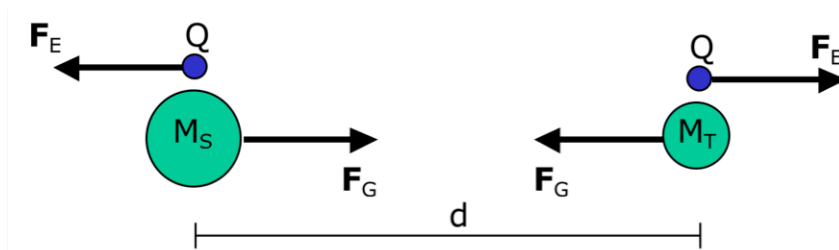
Per cui:

$$V = \frac{0,92 \cdot 10^9}{7,8} = 0,12 \cdot 10^9 \text{ m}^3 \quad \text{e quindi:} \quad R = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0,12 \cdot 10^9}{4\pi}} = 0,31 \cdot 10^3 \text{ m} = 310 \text{ m}$$

Problema

Determinare il valore che dovrebbero avere due cariche uguali poste una sulla Terra e l'altra sul Sole, affinché la forza di repulsione elettrica neutralizzi l'attrazione gravitazionale Terra - Sole. ($M_{\text{Sole}} = 1,98 \cdot 10^{30} \text{ kg}$; $M_{\text{Terra}} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$; $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$)

Soluzione



La condizione per cui la forza elettrica repulsiva tra le due cariche uguali neutralizzi la forza gravitazionale attrattiva tra la Terra ed il Sole, è la seguente:

$$F_E = F_G \Rightarrow K \cdot \frac{Q^2}{d^2} = G \cdot \frac{M_S \cdot M_T}{d^2} \Rightarrow K \cdot Q^2 = G \cdot M_S \cdot M_T \Rightarrow Q^2 = \frac{G \cdot M_S \cdot M_T}{K} \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{G \cdot M_S \cdot M_T}{K}} =$$

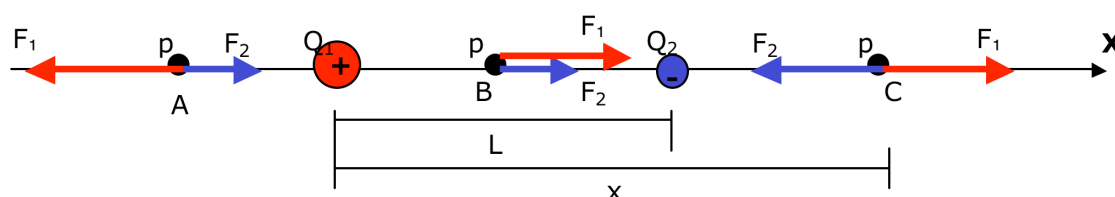
$$\sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,98 \cdot 10^{30} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{9 \cdot 10^9}} = 2,96 \cdot 10^{17} \text{ C}$$

Problema

Due cariche $Q_1 = +8e$ $Q_2 = -4e$ sono poste alla distanza $L = 20 \text{ cm}$. In che punto si può collocare un protone in modo che resti in equilibrio?

Soluzione

Innanzitutto stabiliamo da che parte bisogna sistemare il protone:



Tenendo presente la legge di Coulomb, valgono le seguenti considerazioni:

- se il protone fosse nel punto A, su di esso agirebbero due forze opposte, ma F_1 sarebbe più grande di F_2 in quanto la carica Q_1 , oltre ad essere più vicina al protone, ha un valore più grande della carica Q_2 ; quindi il protone si sposterà verso sinistra e pertanto la posizione A non può essere quella di equilibrio.
- se il protone fosse nel punto B, su di esso agirebbero due forze concordi, per cui il protone si sposterà verso sinistra; pertanto la posizione B non può essere quella di equilibrio.

- se il protone fosse nel punto C, su di esso agirebbero due forze opposte, ed essendo la carica Q_1 più lontana, **la posizione C sarà quella di equilibrio.**

Nella posizione di equilibrio C, le due forze $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ dovranno essere uguali in modulo:

$$(1) F_1 = F_2$$

Se poniamo la carica Q_1 nell'origine dell'asse X ed indichiamo con x la posizione del protone rispetto a Q_1 , la (1) diventa:

$$K \cdot \frac{Q_1 \cdot p}{x^2} = K \cdot \frac{Q_2 \cdot p}{(x - L)^2} \Rightarrow Q_1 \cdot (x - L)^2 = Q_2 \cdot x^2 \Rightarrow 8e \cdot (x - L)^2 = 4e \cdot x^2 \Rightarrow$$

$$2x^2 - 4L \cdot x + 2L^2 = x^2 \Rightarrow x^2 - 4L \cdot x + 2L^2 = 0$$

L'equazione da risolvere è un'equazione di 2° grado, la cui soluzione ci darà la posizione di equilibrio del protone:

$$x^2 - 80x + 800 = 0 \Rightarrow x_1 = 68,3 \text{ cm} \quad x_2 = 11,7 \text{ cm}$$

La soluzione $x_2 = 11,7 \text{ cm}$ va scartata in quanto in quella posizione il protone si troverebbe nella posizione tra Q_1 e Q_2 , che come abbiamo visto, non è una posizione di equilibrio.

Problema

Una sferetta di massa $m = 9,00 \text{ g}$ possiede una carica di $1,00 \cdot 10^{-9} \text{ C}$. Se la Terra, approssimata a una sfera di raggio $6,38 \cdot 10^3 \text{ km}$, avesse una carica di segno opposto uguale a $4,00 \cdot 10^{11} \text{ C}$, quale sarebbe l'accelerazione della sferetta in prossimità della superficie terrestre?

Soluzione

Consideriamo la carica distribuita sulla Terra come una carica puntiforme posta nel suo centro (teorema sul guscio sferico carico). Per calcolare l'accelerazione della sferetta applichiamo il 2° principio della dinamica:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_e + \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow F_e + mg = ma \quad a = \frac{F_e + mg}{m} \quad (1)$$

dove le forze che agiscono sulla sferetta sono la forza di Coulomb $\mathbf{F}_e$, attrattiva, e la forza peso $\mathbf{P}$:

$$F_e = K \cdot \frac{Q \cdot q}{R^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{4,00 \cdot 10^{11} \cdot 1,00 \cdot 10^{-9}}{(6,38 \cdot 10^6)^2} = 0,09 \text{ N}$$

$$P = mg = 9,00 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 = 0,088 \text{ N}$$

Sostituendo nella (1) i valori trovati, otterremo l'accelerazione della sferetta:

$$a = \frac{0,09 + 0,088}{9 \cdot 10^{-3}} = 19,8 \text{ m/s}^2$$

Problema

Due piccole sfere conduttrici identiche hanno cariche Q e q . Sapendo che, dopo essere state messe a contatto fra loro, esercitano l'una sull'altra, a parità di distanza, una repulsione elettrica uguale a $9/8$ di quella esercitata prima del contatto, determina il rapporto Q/q .

Soluzione

Prima del contatto le due sfere agiscono attraverso la forza elettrica F_1 data da:

$$F_1 = K \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$$

Dopo il contatto, la carica su entrambe le sfere è $(Q+q)/2$, in quanto si ripartisce in parti uguali essendo le sfere identiche, per cui l'intensità della forza di repulsione F_2 è:

$$F_2 = K \cdot \frac{\left(\frac{Q+q}{2}\right)^2}{r^2}$$

Imponendo che sia:

$$F_2 = \frac{9}{8} F_1$$

otteniamo:

$$K \cdot \frac{\left(\frac{Q+q}{2}\right)^2}{r^2} = \frac{9}{8} \cdot K \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2}$$

$$\frac{Q^2 + q^2 + 2Qq}{4} = \frac{9Qq}{8} \Rightarrow 2Q^2 + 2q^2 + 4Qq = 9Qq \Rightarrow 2Q^2 + 2q^2 - 5Qq$$

Dividendo entrambi i membri per q e ponendo $Q/q = x$, otteniamo un'equazione di 2° grado che risolta ci darà i valori dell'incognita Q/q :

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = \frac{1}{2}$$